

УДК 517.98

М. А. Митрофанов О. В. Равський

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

У статті розглянуто апроксимацію аналітичними та $*$ -аналітичними функціями неперервних функцій на зліченно нормованих просторах Фреше. Також знайдено критерій існування продовження неперервної функції з всього щільного підпростору топологічного простору на весь простір.

У питанні апроксимації неперервних функцій на просторі перші ґрунтовні результати були отримані ще Вейерштрассом у 1885 році. Проте, ці дослідження стосувалися підмножин скінченновимірних просторів. У випадку дійсного банахового простору наступний позитивний результат отримано Я. Курцвейлом у [6]:

Теорема 1 . Нехай X — сепарабельний дійсний банахів простір, що допускає розділячий поліном, G — довільна відкрита підмножина в X . Нехай F — неперервний оператор визначений в G зі значеннями в довільному банаховому просторі Y . Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий оператор H , аналітичний в G , що нерівність:

$$\|F(x) - H(x)\| < \varepsilon \quad (1)$$

виконується для всіх $x \in G$.

Пізніше М. Боісо і П. Гаєк у праці [5] отримали, для апроксимації рівномірно неперервних функцій на дійсних банахових просторах, сильніший результат при підсиленні додаткових умов. У 2009 році у праці [2] отримано аналоги результатів Я. Курцвейла та М. Боісо і П. Гаєка для комплексних банахових просторів.

В даній роботі автори, спираючись на попередні результати отримані для банахових просторів, досліджують можливість апроксимації неперервних функції для деяких просторів Фреше, причому як для дійсного, так і для комплексного випадку.

Нагадаємо основні означення. Нехай X та Y лінійні простори над \mathbb{R} або \mathbb{C} .

Означення 1 . Відображення $B_n, B_n : X^n \rightarrow Y$ називається $*$ - n -лінійним, якщо воно подається у вигляді:

$$B_n(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}) = \sum_{k+m=n} c_{km} B_{km}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}),$$

де відображення $B_{km} : X^{k+m} \rightarrow Y$ є ненульовим k -лінійним відносно $x_i \in X$, для $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$ і t -антилінійним відносно $x_{k+j} \in X$, для $1 \leq j \leq t \in \mathbb{N}$. Коефіцієнти c_{km} приймають значення 0 або 1, але принаймні одне значення c_{km} відмінне від нуля, та $n = k + t$.

Означення 2 . Відображення $F_n, F_n : X \rightarrow Y$ називається n -однорідним $*$ -поліномом, якщо існує $*$ - n -лінійне відображення $B_n : X^n \rightarrow Y$ таке, що

$F_n(x) = B_n(x, \dots, x)$, для всіх $x \in X$. У випадку коли $n = 0$, F_0 є тотожною константою в Y .

Означення 3. Відображення F з X в Y , називається $*$ -поліномом степеня j , якщо $F = \sum_{n=0}^j F_n$, де F_n є n -однорідним $*$ -поліномом та $F_j \neq 0$.

Нехай X топологічний векторний простір, Y нормований простір.

Означення 4. Відображення $F : X \rightarrow Y$ називається $*$ -аналітичним, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл $V \subset X$, $x \in V$, такий що $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$, де F_n є n -однорідними неперервними $*$ -поліномами і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ збігається рівномірно в околі V за нормою простору Y .

Позначимо через $\tilde{\mathcal{H}}(X, Y)$ лінійний простір всіх $*$ -аналітичних відображень з комплексного нормованого простору X в комплексний банаховий простір Y .

Легко бачити, що якщо F_n породжуються лише формами вигляду B_{k0} , то означення F_n буде означенням полінома на лінійному просторі та відповідне відображення F , породжене відображеннями F_n , буде аналітичною функцією.

Позначимо через $\mathcal{H}(X, Y)$ лінійний простір всіх аналітичних відображень з нормованого простору X в банаховий простір Y .

Означення 5. $*$ -поліном $P : X \rightarrow \mathbb{C}$ на нормованому просторі X називається розділяючим $*$ -поліномом, якщо:

1. $P(0) = 0$.
2. $|P(x)| \geq 1$ для кожного $x \in X$ такого, що $\|x\| = 1$.

Зокрема, якщо $*$ -поліном P є поліномом і діє з дійсного простору X у простір \mathbb{R} , то він називається розділяючим поліномом.

Означення 6. Нехай X є комплексним нормованим простором. Будемо говорити, що функція $Q : X \rightarrow \mathbb{C}$, $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ для всіх $x \in X$, де $Q_n(x)$ — n -однорідні $*$ -поліноми, є рівномірно $*$ -аналітичною та розділяючою, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. Існує таке число R_Q , що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ збігається рівномірно в кулі радіуса R_Q з центром у довільній точці $x_0 \in X$.
2. Існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що множина таких $x \in X$, що $|Q(x)| < \alpha$ є непорожньою та лежить у відкритій одиничній кулі B .

Означення 7. Нехай X є дійсним нормованим простором. Будемо говорити, що дійсна функція $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і розділяючою, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. Функція Q є дійсною аналітичною на X з радіусом збіжності R_{Q_x} в кожній точці $x \in X$ більшим або рівним за R_Q для деякого $R_Q > 0$.
2. Існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що множина таких $x \in X$ що $Q(x) < \alpha$ є непорожньою та лежить у відкритій одиничній кулі B .

Нам знадобляться наступні дві технічні леми. Хоча, напевне, їх доведення є відомими, авторам не вдалося їх знайти в літературі, і тому, заради повноти, ми наводимо доведення цих лем нижче.

Для фільтра \mathcal{F} на топологічному просторі через $\lim \mathcal{F}$ ми позначатимемо множину всіх границь фільтру \mathcal{F} . Згідно з [4, 1.6] ми будемо казати, що фільтр \mathcal{F} збігається до точки x , якщо $x \in \lim \mathcal{F}$, та що фільтр \mathcal{F} є збіжним, якщо $\lim \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний топологічний простір, D — щільна підмножина простору X , $g : D \rightarrow Y$ відображення та \mathcal{F} — фільтр на просторі X . Через $g(\mathcal{F})$ позначимо фільтр на просторі Y , породжений базою $\{g(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Для кожної точки $x \in X$ через \mathcal{F}_x позначимо слід фільтру всіх оточень точки x на множині D .

Лема 1 . *Неперервне відображення $f : D \rightarrow Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ тоді і лише тоді, коли для довільної точки $x \in X$ фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним.*

ДОВЕДЕННЯ. Необхідність. Нехай $x \in X$ — довільна точка. Тоді, оскільки відображення f є неперервним, за твердженням [4, 1.6.10], виконується включення

$$\tilde{f}(x) \in \tilde{f}(\lim \mathcal{F}_x) \subset \lim \tilde{f}(\mathcal{F}_x) = \lim f(\mathcal{F}_x),$$

отже фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним.

Достатність. Оскільки простір Y є хаусдорфовим, то, за твердженням [4, 1.6.11], для кожної точки $x \in X$ фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ має єдину границю. Побудуємо відображення \tilde{f} , прийнявши $\{\tilde{f}(x)\} = \lim f(\mathcal{F}_x)$, для кожної точки $x \in X$. За неперервністю f на D маємо $\{\tilde{f}(x)\} = \lim f(\mathcal{F}_x) \supset f(\lim \mathcal{F}_x) = \{f(x)\}$. Отже, відображення \tilde{f} є продовженням відображення f .

Покажемо тепер неперервність відображення \tilde{f} . Нехай \tilde{V} — довільна непорожня відкрита підмножина простору Y та $x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{V})$. За регулярністю простору Y , існує відкрита підмножина \tilde{U} така, що $\tilde{f}(x) \in \tilde{U} \subset \overline{\tilde{U}} \subset \tilde{V}$. Оскільки $\lim f(\mathcal{F}_x) \subset \tilde{U}$, то існує відкритий окіл U точки x , такий, що $f(U \cap D) \subset \tilde{U}$. Тоді для кожної точки $x' \in U$ маємо $\{\tilde{f}(x')\} = \lim f(\mathcal{F}_{x'}) \subset \overline{\tilde{U}} \subset \tilde{V}$.

□

Топологічний простір X називається *простором Фреше-Урисона* (див. наприклад [4, 1.6]), якщо для довільної $A \subset X$ та довільної $x \in \overline{A}$ існує послідовність $\{x_n\}$ точок множини A , збіжна до x . Кожен простір з першою аксіомою зліченності (а, отже, і кожен метризовний простір) є простором Фреше-Урисона [4, 1.6.14].

Лема 2 . *Нехай X — простір Фреше-Урисона, Y — регулярний топологічний простір, D — щільна підмножина простору X . Неперервне відображення $f :$*

$D \rightarrow Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ тоді і лише тоді, коли для довільної збіжної в X послідовності $\{x_n\}$ точок з D послідовність $\{f(x_n)\}$ теж є збіжною.

ДОВЕДЕННЯ. Необхідність. Нехай $x \in X$ — довільна точка, та $\{x_n\} \subset D$ — збіжна до x послідовність. Позначимо через \mathcal{S}_x фільтр на D , породжений базою $\{\{x_n : n \geq m\} : m \in \mathbb{N}\}$. За Лемою 1 фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним. Легко бачити, що фільтр \mathcal{S}_x є тонкішим за фільтр \mathcal{F}_x . Оскільки фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ є збіжним, то за твердженням [4, 1.6.8], фільтр $f(\mathcal{S}_x)$ також є збіжним, і, отже, послідовність $\{f(x_n)\}$ теж є збіжною.

Достатність. Нехай $x \in X$ — довільна точка, та $\{x_n\} \subset D$ — збіжна до x послідовність. Нехай послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до точки $y \in Y$. Ми покажемо, що фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ теж збігається до точки y . Дійсно, припустимо протилежне. Тоді існує такий окіл \tilde{V} точки y , що для довільного околу U точки x існує точка $x_U \in U \cap D$ така, що $f(x_U) \in Y \setminus \tilde{V}$. Позначимо сім'ю всіх околів точки x через \mathcal{N}_x і приймемо $A = \{x_U : U \in \mathcal{N}_x\}$. З побудови A випливає, що $x \in \overline{A}$, тому існує послідовність точок $\{x'_n\} \subset A$ збіжна до x . Задамо послідовність $\{x''_n\} \subset D$ наступним чином, поклавши $x''_{2n} = x_n$ та $x''_{2n-1} = x'_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $\{x''_n\}$ є збіжною до x , тому, за умовою леми, послідовність $\{f(x''_n)\}$ теж є збіжною до деякої точки $y'' \in Y$. Зрозуміло, що послідовність $\{f(x_n)\}$ є підпослідовністю послідовності $\{f(x''_n)\}$. Оскільки $\{f(x''_n)\}$ збігається до y'' , а $\{f(x_n)\}$ збігається до y , то $y'' = y$. Тому послідовність $\{f(x'_n)\}$ теж збігається до точки y . Але, за побудовою множини A , $\{f(x'_n)\} \subset Y \setminus \tilde{V}$, отже $y \in Y \setminus \tilde{V}$. Це суперечить тому, що $y \in \tilde{V}$. Таким чином фільтр $f(\mathcal{F}_x)$ збігається до точки y . Тому, за лемою 1, відображення $f : D \rightarrow Y$ продовжується до неперервного відображення $\tilde{f} : X \rightarrow Y$.

□

Топологічний простір X називається *секвенціальним простором*, [4, 1.6] якщо множина $A \subset X$ замкнена тоді і тільки тоді, коли разом з кожною послідовністю вона містить всі її границі. Кожен простір Фреше-Урисона є секвенціальним. [4, 1.6.14]

Наступний приклад показує, що в лемі 5 умову " X — простір Фреше-Урисона" не можна послабити до умови " X — секвенціальний простір".

Приклад 1 Нехай X — секвенціальний досконало нормальний простір з прикладу [4, 1.6.19]. Тобто, $X = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, де $X_i = \{1/i\} \cup \bigcup_{j=i^2}^{\infty} \left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right\}$. Тоді $X_i \cap X_k = \emptyset$ при $i \neq k$. Топологія на X породжується наступною системою околів. Всі точки $\frac{1}{i} + \frac{1}{j}$ — ізолювані точки простору X . Для точок вигляду $\frac{1}{i}$ візьмемо в якості сім'ї околів сім'ю всіх множин $X_i \setminus \bigcup_{j=i^2}^k \left\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right\}$ для $k = i^2, i^2 + 1, \dots$. Нарешті, в якості елементів бази в точці 0 візьмемо всі множини, отримані з X викиданням скінченної кількості членів X_i і скінченної кількості точок вигляду $\frac{1}{i} + \frac{1}{j}$ у всіх X_i , котрі залишилися.

Приймемо $D = X \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1/i\})$ і $Y = X \setminus \{0\}$ та розглянемо відображення $f : D \rightarrow Y$ таке, що $f(x) = x$ для всіх точок $x \in D$.

Нехай $\{x_n\}$ — довільна з послідовність точок з D , збіжна до точки $x \in X$. Легко показати, що $x \neq 0$. Оскільки відображення f є тотожнім на просторі D , то послідовність $\{f(x_n)\}$ теж збіжна до точки x в просторі Y .

Припустимо тепер, що існує неперервне продовження $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ відображення f . Зафіксуємо довільне число $i \in \mathbb{N}$. Послідовність $\{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}, j \geq i^2\}$ збігається до точки $1/i \in X$. Тоді, за лемою [4, 1.6.15], послідовність $\{\tilde{f}(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}) : j \in \mathbb{N}, j \geq i^2\}$ збігається до точки $\tilde{f}(1/i)$. Але, оскільки ця послідовність має єдину границю в просторі Y , то $\tilde{f}(1/i) = 1/i$. Застосуємо лему [4, 1.6.15] до послідовності $\{1/i\} \subset X$. Отримаємо, що $\lim\{\tilde{f}(1/i)\} \supset \tilde{f}(\lim\{1/i\}) = \{\tilde{f}(0)\}$. Але це неможливо, бо послідовність $\{1/i\}$ не є збіжною в просторі Y . Ця суперечність показує, що не існує неперервного продовження відображення f на простір X .

Наступна лема доведена у праці [4, 4.3.17].

Лема 3 *Нехай (X, ρ) — метричний простір, (Y, σ) — повний метричний простір, D — щільна підмножина простору X . Тоді кожне відображення $f : D \rightarrow Y$, рівномірно неперервне відносно ρ та σ , продовжується до відображення $\tilde{f} : X \rightarrow Y$, рівномірно неперервного відносно ρ та σ .*

Зауважимо, що існують неперервні функції, що задовольняють умовам леми 2, але не є рівномірно неперервними. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$, що діє зі всюди щільної підмножини \mathbb{R}_+ в \mathbb{R}_+ продовжується на все \mathbb{R}_+ та задовольняє умовам леми 2, але не є рівномірно неперервною.

Нагадаємо, що лінійний топологічний простір X є простором Фреше, якщо X є метризовним повною метрикою локально опуклим простором. Відомо, що це означення еквівалентно до наявності на X зліченної системи напівнорм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, які задають повну метрику ρ на X таким способом [3]:

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}. \quad (2)$$

Топологія, що породжується метрикою ρ на просторі X , є найслабшою топологією відносно якої всі напівнорми p_n є неперервними. Базу околів нуля цієї топології утворює сім'я $\{U_{p_n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$, де $U_{p_n}(0) = \{x \in X : p_k(x) < \frac{1}{n} \text{ для всіх } 1 \leq k \leq n\}$. При цьому послідовність $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ точок простору X прямує до точки $x_0 \in X$ тоді і лише тоді, коли для довільного $k \in \mathbb{N}$, послідовність $\{p_k(x_n - x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля, коли n прямує до нескінченності. Для нормованого простору Y функція $f : X \rightarrow Y$ є неперервною в точці x_0 , якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, що прямує до x_0 послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ прямує до $f(x_0)$.

Наступне твердження є доведеним у літературі.

Твердження 1 . *Нехай простір X є простором Фреше з системою напівнорм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а Y банаховим простором. Функція $f : X \rightarrow Y$ є неперервною в точці $x_0 \in X$, якщо існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що f неперервна відносно напівнорми p_k .*

Зафіксуємо напівнорму p_n на X . Відомо, що $\ker p_n$ є замкненим лінійним підпростором. Позначимо через \widetilde{X}_n поповнення фактор простору $X/\ker p_n$. У випадку коли p_n є нормами $X = X/\ker p_n$ та фактор норма співпадає з p_n .

Припустимо, що простір X є сепарабельним та для довільного X_n існує розділяючий поліном (розділяюча рівномірно аналітична функція). Чи буде впливати з цих умов, що кожна неперервна (рівномірно неперервна) функція апроксимується аналітичними на X ? Нижче ми даємо часткову відповідь на ці питання.

Теорема 2 . *Нехай простір X є сепарабельним дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а Y — банаховим простором. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір $X_n = (X, p_n)$ допускає розділяючий поліном. Тоді кожна функція $f : X \rightarrow Y$, для якої існує $k \in \mathbb{N}$, що для довільної фундаментальної послідовності точок $\{x_n\}$ в X_k , послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ є збіжною, наближається аналітичними рівномірно на всьому X .*

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки для довільної фундаментальної послідовності точок $\{x_n\}$ в X_k , послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ є збіжною, то функція f є неперервною на просторі X_k , а отже за твердженням 1 і на просторі X . Зауважимо, що якщо простір $X_k = (X, p_k)$ не є банаховим простором, то він неповний відносно норми p_k . Оскільки p_n є системою норм, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ носії просторів X_n та X співпадають. Поповнимо простір X_k відносно норми p_k до банахового простору \widetilde{X}_k . Тоді, оскільки X_k є щільним в \widetilde{X}_k , і X_k допускає розділяючий поліном, то \widetilde{X}_k теж допускає розділяючий поліном. З умов теореми, щільності X_k в X та за лемою 2, існує неперервне продовження \widetilde{f} відображення f на простір \widetilde{X}_k . За теоремою Курцвейла 1 функція \widetilde{f} рівномірно наближається послідовністю аналітичних функцій $\{f_m\}$ на просторі \widetilde{X}_k . Звуження f_m функції \widetilde{f}_m на простір X_k для довільного $m \in \mathbb{N}$ є аналітичним за означенням. Тому функція f рівномірно наближається послідовністю $\{f_m\}$ аналітичних функцій на просторі X_k . Легко бачити, що відображення f_m є аналітичним на просторі X , а отже функція f рівномірно наближається послідовністю $\{f_m\}$ аналітичних функцій на просторі X .

□

Теорема 3 . *Нехай простір X є сепарабельним дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а Y — банаховим простором. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$, простір $X_n = (X, p_n)$ допускає рівномірно аналітичну і розділяючу функцію. Тоді кожна рівномірно неперервна функція $f : X \rightarrow Y$ наближається аналітичними рівномірно на всьому X , якщо існує $k \in \mathbb{N}$, що f є рівномірно неперервною на X_k .*

Доведення цієї теореми є аналогічним до доведення попередньої теореми, тільки замість леми 2, ми використовуємо лему 3 та замість теореми Курцвейла 1 ми використовуємо основний результат М. Боісо і П. Гаєка [5, теорему 1, стор. 83].

□

Зауважимо, що у теоремі 3 вимогу рівномірної неперервності f можна опустити.

Аналогічно, спираючись на леми 2, 3 та результати роботи [2] можна довести дві наступні теореми.

Теорема 4 . *Нехай простір X є сепарабельним комплексним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а Y — банаховим простором. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (X, p_n)$ допускає розділяючий $*$ -поліном. Тоді кожна функція $f : X \rightarrow Y$ така, що існує $k \in \mathbb{N}$, таке що для довільної фундаментальної послідовності точок $\{x_n\}$ в X_k , послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ є збіжною наближається $*$ -аналітичними рівномірно на всьому X .*

Теорема 5 . *Нехай простір X є сепарабельним комплексним простором Фреше, зі зліченною системою норм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, а Y — банаховим простором. Нехай для довільного $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (X, p_n)$ допускає рівномірно $*$ -аналітичну та розділяючу функцію. Тоді кожна рівномірно неперервна функція $f : X \rightarrow Y$ наближається $*$ -аналітичними рівномірно на всьому X , якщо існує $k \in \mathbb{N}$, таке що f є рівномірно неперервною на X_k .*

Результати теорем 4 (2) можна узагальнити наступним чином.

Зауваження 1 *Нехай простори X та Y такі як у теоремах 4 (2). Через $C(X, Y)$ ми позначимо простір неперервних функцій з простору X у простір Y , наділений топологією рівномірної збіжності. Замикання $\tilde{\mathcal{H}}(X, Y)$ ($\overline{\mathcal{H}(X, Y)}$) простору $\tilde{\mathcal{H}}(X, Y)$ ($\mathcal{H}(X, Y)$) у просторі $C(X, Y)$ — це лінійний простір всіх неперервних функцій з простору X у простір Y , які є рівномірно апроксимовними $*$ -аналітичними (аналітичними) функціями з простору X у простір Y .*

Нехай для всіх $k \in \mathbb{N}$ на просторі $X_k = (X, p_k)$ існує розділяючий поліном. Зафіксуємо довільний індекс $k \in \mathbb{N}$. Через $\tilde{C}(X_k, Y) \subset C(X, Y)$ ми позначимо лінійний простір неперервних функцій з простору X_k у простір Y , які продовжуються до неперервних функцій з поповнення \tilde{X}_k нормованого простору X_k у простір Y . За теоремами 4 (2) $\tilde{C}(X_k, Y) \subset \tilde{\mathcal{H}}(X, Y)$ ($\tilde{C}(X_k, Y) \subset \overline{\mathcal{H}(X, Y)}$). Через $\overline{C}(X, Y)$ позначимо замикання лінійного підпростору, породженого множиною $\bigcup \{\tilde{C}(X_k, Y) : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $C(X, Y)$. Тоді $\overline{C}(X, Y) \subset \overline{\tilde{\mathcal{H}}(X, Y)}$ ($\overline{C}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{H}(X, Y)}$).

До наведеного у прикладі 4 праці [1, 3.5.3] злічено-гільбертового простору швидкоспадаючих послідовностей з системою норм $\{\|x\|_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $\|x\|_k = (\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, ми можемо застосувати попередні теореми. Оскільки цей простір не є банаховим, то в роботі знайдено нові простори, на яких неперервні функції певного вигляду допускають рівномірну апроксимацію аналітичними.

Наступний приклад показує нетривіальність лінійного простору $\overline{C}(X, Y)$.

Приклад 2 . *Нехай X — простір Фреше, що не є банаховим, з топологією, заданою системою норм $\{p_n\}$. Нехай $f(x) = \rho(x, 0)$ для всіх $x \in X$ де ρ —*

метрика на просторі X , визначена формулою (2). За побудовою, $f \in \overline{C}(X, \mathbb{R})$. Припустимо, що існує індекс $k \in \mathbb{N}$ такий, що $f \in \overline{C}(X_k, \mathbb{R})$. Оскільки простір X не є банаховим, топологія Фреше на X строго сильніша за топологію задану нормою ρ_k . Отже існує таке число $\varepsilon > 0$, що множина $\{x \in X : \rho(x, 0) < \varepsilon\} = f^{-1}(-\infty, \varepsilon)$ не містить жодного відкритого в X_k околу нуля, що суперечить неперервності функції f на просторі X_k .

Наведемо приклад, який показує суттєвість умови локальної опуклості для апроксимації неперервних функцій.

Приклад 3 Нехай X — це простір $L_p[0, 1]$ де $0 < p < 1$. Метрика на X задається у наступний спосіб:

$$\rho(x, y) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Відомо, що відносно метрики ρ простір X є повним, але не локально опуклим. Зокрема на цьому просторі не існує жодного ненульового лінійного неперервного функціоналу (див. [3], стор. 44, 49). Отже на X не існує жодної аналітичної функції відмінної від сталої (бо похідна Фреше аналітичної функції є лінійним неперервним функціоналом). З іншого боку, на X існують неперервні не сталі функції, наприклад $F(f) = \rho(0, f)$, які, отже, не наближаються аналітичними.

Автори висловлюють вдячність Тарасу Банаху та Андрію Загороднюку, за участь у обговоренні статті.

Література

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 542 с.
- [2] Митрофанов М.А. Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах // Математические заметки. — 2009. — Том 86 — Вип. 4. — С. 557–570.
- [3] Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
- [4] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
- [5] Boiso M. C., Hájek P. Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2001. — Vol.256. — P. 80–98.
- [6] Kurzweil J. On approximation in real Banach spaces // Studia Math. — 1954. — Vol.14. — P. 214–231.

М. А. Митрофанов А. В. Равский

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

В статье рассмотрена аппроксимация аналитическими и $*$ -аналитическими функциями непрерывных функций на счетно нормированных пространствах Фреше. Найден критерий существования продолжения непрерывной функции с всюду плотного подпространства топологического пространства на всё пространство.

М. А. Mytrofanov A. V. Ravsky

APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON FRECHET SPACES

We consider approximations of a continuous function on a countable normed Fréchet space by analytic and $*$ -analytic. Also we found a criterium of the existence of an extension of a continuous function from a dense subspace of a topological space onto the space.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів